



TITLE:

ポートフォリオ選択問題における 資産の収益率の確立順序(最適化の 数理とその応用)

AUTHOR(S):

大西, 匡光; 宮野, きぬ ステファニー; 茨木, 俊秀

CITATION:

大西, 匡光 ...[et al]. ポートフォリオ選択問題における資産の収益率の確立順序(最適化の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1993, 835: 206-216

ISSUE DATE:

1993-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83440>

RIGHT:

ポートフォリオ選択問題における資産の収益率の確率順序

東北大学 経済学部 大西 匡光* (Masamitsu OHNISHI)

NHK 報道局 宮野 きぬ ステファニー† (Kinu Stephany MIYANO)

京都大学 工学部 茨木 俊秀‡ (Toshihide IBARAKI)

1 はじめに

本稿では投資家が彼(彼女)の富を不確実な収益を生む複数の資産にどのように分散して投資すべきかを問うポートフォリオ選択問題において、資産の収益率に何らかの確率順序 (stochastic ordering) (あるいは確率優位 (stochastic dominance)) が成立すると仮定し、その投資への影響について考察する

危険回避的であり、最終の富に関する期待効用を最大化しようとする投資家は、ある適当な確率順序の意味で“確率的に大きい”収益率を持つ資産に、常により多くを投資するであろうという直感的な推測は、投資家の効用関数の性質と確率順序の種類によっては必ずしも真ではないことが知られており、それが成立するための条件について、近年いくつかの研究がなされてきている。

確率順序には大まかには

- 関数族により生成される確率順序,
- 条件付き確率順序

に類別されるが、その中でも特に

- 通常の確率順序 (ordinary stochastic ordering),
- 増加凹順序 (increasing concave ordering),
- 凹順序 (concave ordering),
- 尤度比順序 (likelihood ratio ordering),
- ハザード率順序 (hazard rate ordering)

などが応用上重要であり、よく研究されている。

Brown and Solomon [1] が尤度比順序に関して示した結果を用いれば、資産が互いに独立、すなわちそれらの収益率が互いに確率的に独立で、それらの間に尤度比順序が成立すれば、任意の投資家は、その順序の意味で確率的に大きい収益率を持つ資産に、より多くを投資することを示すことができる。

*〒980 宮城県 仙台市 青葉区 川内 東北大学 経済学部 経営学科

†〒150 東京都 渋谷区 神南 2-2-1 NHK 報道局 (ニュースセンター) 特報 II 部

‡〒606-01 京都市 左京区 吉田本町 京都大学 工学部 数理工学科

また Shanthikumar and Yao [7] がハザード率順序に関して示した結果を用いれば、資産が互いに独立で、それらの収益率の間に、ハザード率順序とは双対な確率順序とも言える逆ハザード率順序 (reversed hazard rate ordering) が成立すれば、任意の危険回避的投資家は、その順序の意味で確率的に大きい収益率を持つ資産に、より多くを投資することを示すことができる。

一方 Hadar and Seo [2] は資産が互いに独立で、それらの収益率の間に通常確率順序と凹順序が成立する場合のそれぞれを考察し、それらの順序の意味で確率的に大きい収益率を持つ資産に、より多くを投資するための投資家の効用関数の持つ必要十分条件を導出した。

本稿では、資産の収益率が互いに独立で、それらの間に増加凹順序とハザード率順序が成立する場合のそれぞれに対して、それらの順序の意味で確率的に大きい収益率を持つ資産に、より多くを投資するための投資家の効用関数の持つ必要十分条件を導出する。

2 確率順序

集合 A に対し、 $A \times A$ の部分集合 B を集合 A 上の 2 項関係と言い、 $(x, y) \in B$ のとき xBy とかく。

集合上 A の 2 項関係 B は、下記の性質の内 **P1**, **P2** を満たすとき集合 A 上の擬順序と言われ、さらに性質 **P3** をも満たすとき、集合 A 上の半順序と言われる。

P1 (反射律): $xBx, \forall x \in A$.

P2 (推移律): $xBy, yBz \implies xBz$.

P3 (反対称律): $xBy, yBx \implies x = y$.

確率変数、確率過程などの確率要素の集合上の擬順序、半順序を確率順序と言う、ただし半順序においては性質 **P3** における $x = y$ の等号 $=$ は確率法則が等しいと読み代えるものとする。

実数値確率変数 X の累積分布関数を F_X と書くことにする、すなわち

$$F_X(x) := P(X \leq x).$$

さらにその 1 に関する補関数である生存関数、あるいは信頼度関数を

$$\bar{F}_X(x) := P(X > x).$$

X が連続な確率変数である (F_X が絶対連続) な場合、

$f_X(x)$: 確率密度関数,

$$h_X(x) := \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}: \text{ハザード率関数, あるいは故障率関数}$$

と表わすことにする。

本稿で扱う確率順序は、以下で定義される、

- 増加凹順序 (increasing concave ordering),
- ハザード率順序 (hazard rate ordering)

の 2 種類である。

定義 2.1 (\geq_{icv} : 増加凹順序) 実数値確率変数 X, Y に対し,

$$X \geq_{icv} Y \text{ (あるいは } F_X \geq_{icv} F_Y) \quad (2.1)$$

が成り立つとは,

$$\text{すべての増加凹関数 } f \text{ に対して } E[f(X)] \geq E[f(Y)] \quad (2.2)$$

のとき, そしてそのときに限りを言う. \square

次の定理はよく知られている.

定理 2.1 実数値確率変数 X, Y に対し, $X \geq_{icv} Y$ (あるいは $F_X \geq_{icv} F_Y$) が成り立つための必要十分条件は

$$E[(u - X)^+] = \int_{-\infty}^u F_X(v) dv \leq \int_{-\infty}^u F_Y(v) dv = E[(u - Y)^+], \quad \forall u \in \mathcal{R}. \quad (2.3)$$

$$(E[\min\{u, X\}] = u - E[(u - X)^+] \geq u - E[(u - Y)^+] = E[\min\{u, Y\}], \quad \forall u \in \mathcal{R}.) \quad (2.4)$$

\square

以下の定理も重要である.

定理 2.2 (Cut Criterion) $E[X] \geq E[Y]$ とする. ある $u_0 \in \mathcal{R}$ が存在して,

$$F_X(u) \leq F_Y(u), \quad u \leq u_0, \quad (2.5)$$

$$F_X(u) \geq F_Y(u), \quad u \geq u_0 \quad (2.6)$$

が成り立つならば

$$X \geq_{icv} Y \text{ (あるいは } F_X \geq_{icv} F_Y).$$

\square

定義 2.2 (\geq_{hr} : ハザード率順序) 実数値確率変数 X, Y に対して,

$$X \geq_{hr} Y \text{ (あるいは } F_X \geq_{hr} F_Y) \quad (2.7)$$

が成り立つとは,

$$\text{すべての } s, u \text{ (} -\infty < s \leq u < +\infty \text{) に対して } \left| \begin{array}{cc} \bar{F}_Y(s) & \bar{F}_Y(u) \\ \bar{F}_X(s) & \bar{F}_X(u) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} P(Y > s) & P(Y > u) \\ P(X > s) & P(X > u) \end{array} \right| \geq 0 \quad (2.8)$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{\bar{F}_X(u)}{\bar{F}_Y(u)} \text{ が } u \text{ に関して増加} \right) \quad (2.9)$$

のとき, そしてそのときに限りを言う. \square

X, Y が連続な確率変数である場合, 定義 2.2 は次の定義と等価である.

定義 2.3 (\geq_{hr} : ハザード率順序) 連続な実数値確率変数 X, Y に対して,

$$X \geq_{hr} Y \text{ (あるいは } F_X \geq_{hr} F_Y) \quad (2.10)$$

が成り立つとは,

$$\text{すべての } u \in \mathcal{R} \text{ に対して } h_X(u) \leq h_Y(u) \quad (2.11)$$

のとき, そしてそのときに限りを言う. \square

2 変数関数 $g : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ に対して,

$$\Delta g(x, y) := g(x, y) - g(y, x) \quad (2.12)$$

と表わし, 2 変数関数の族 \mathcal{G}_{hr}^0 を次で定義する:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{hr}^0 &:= \{g : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}, \Delta g(x, y) \text{ が } x \geq y \text{ のとき } x \text{ について増加} \}, \\ &= \{g : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}, \Delta g(x, y) \text{ が } x \leq y \text{ のとき } y \text{ について減少} \}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

Shanthikumar and Yao [7] は次の定理を示した.

定理 2.3 (Shanthikumar and Yao [7]) 実数値確率変数 X, Y に対して, 以下の 2 つの条件は同値である:

- (1) $X \geq_{hr} Y$ (あるいは $F_X \geq_{hr} F_Y$).
- (2) それぞれ F_X, F_Y を累積分布に持つ, 同じ確率空間上で定義された, 互いに独立な確率変数 \hat{X}, \hat{Y} に対して,

$$E[g(\hat{X}, \hat{Y})] \geq E[g(\hat{Y}, \hat{X})], \quad \forall g \in \mathcal{G}_{hr}^0. \quad (2.15)$$

□

3 ポートフォリオ選択問題

3.1 2 資産ポートフォリオ選択問題

この節では 2 つの資産からなるポートフォリオ選択問題を考える. それら資産の収益率を確率変数 X, Y で表し, 以下では混乱することなく, これらの資産自身もそれぞれ X, Y と呼ぶことにする. いま投資家が初期の富 w の内の比率 λ_X を資産 X , 残りの比率 $1 - \lambda_X$ を資産 Y に投資したとすると, 彼 (彼女) の最終の富の期待効用は

$$U(\lambda_X) := E[u(w\{\lambda_X X + (1 - \lambda_X)Y\})] \quad (3.1)$$

となり, 2 資産ポートフォリオ選択問題とは次の数理計画問題の最適解 λ_X^* を求める, あるいは特徴づけることである:

$$\max_{\lambda_X} U(\lambda_X), \quad (3.2)$$

いま $U(\lambda_X)$ を λ_X で微分すると,

$$U'(\lambda_X) = wE[u'(w\{\lambda_X X + (1 - \lambda_X)Y\})\{X - Y\}], \quad (3.3)$$

$$U''(\lambda_X) = w^2E[u''(w\{\lambda_X X + (1 - \lambda_X)Y\})\{X - Y\}^2] \quad (3.4)$$

となる. 式 (3.4) において, $u'' \leq 0$ であることを用いれば

$$U''(\lambda_X) \leq 0, \quad \forall \lambda_X$$

となり, $U(\lambda_X)$ は λ_X に関して凹であることが解る. 従って, 問題 (3.2) の最適解 λ_X^* は次のように特徴づけることができる: 任意の λ に対して,

$$U'(\lambda) \geq 0 \text{ のとき } \lambda_X^* \geq \lambda, \quad (3.5)$$

$$U'(\lambda) \leq 0 \text{ のとき } \lambda_X^* \leq \lambda. \quad (3.6)$$

特に, 式 (3.5), (3.6) において, $\lambda = \frac{1}{2}$ とおくと, Y よりも X に, より多くを投資する, すなわち

$$\lambda_X^* \geq \frac{1}{2} \quad (\geq 1 - \lambda_X^*) \quad (3.7)$$

が成り立つための必要十分条件は

$$U'\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad (3.8)$$

となる.

以下では一般性を失うこと無く, 投資家の初期の富を 1, すなわち $w = 1$ とする.

定理 3.1 投資家の効用関数が

$$u' \geq 0, \quad u'' \leq 0 \quad (3.9)$$

を満たすものとする. この投資家が互いに独立で, 増加凹順序により,

$$X \geq_{icv} Y \quad (3.10)$$

と順序づけられた 2 つの資産 X, Y でポートフォリオを構成するものとする. このようないかなる X, Y に対しても, 最適ポートフォリオにおいて, Y よりも X に, より多くを投資する, すなわち

$$\lambda_X^* \geq \frac{1}{2}$$

を満たすための, 効用関数 u に関する必要十分条件は,

$$\text{任意の } y \text{ に対して, } u'\left(\frac{x+y}{2}\right)\{x-y\} \text{ が } x \text{ について増加かつ凹} \quad (3.11)$$

$$(\iff \text{任意の } b \text{ に対して, } u'(z+b)z \text{ が } z \text{ について増加かつ凹}) \quad (3.12)$$

となることである.

証明:

(十分性)

$$\text{任意の } y \text{ に対して, } u'\left(\frac{x+y}{2}\right)\{x-y\} \text{ が } x \text{ について増加かつ凹} \quad (3.13)$$

であると仮定する.

いま X, Y を互いに独立で, 増加凹順序により,

$$X \geq_{icv} Y \quad (3.14)$$

と順序づけられた任意の 2 つの資産とする. いま \tilde{Y} を Y と同一の確率分布に従い, さらに X, Y とは独立な確率変数とする. もちろん,

$$X \geq_{icv} \tilde{Y} \quad (3.15)$$

が成り立つ. $U' \left(\frac{1}{2} \right)$ は以下のように評価できる:

$$\begin{aligned}
 U' \left(\frac{1}{2} \right) &= E \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) \{X-Y\} \right] \\
 &= E_Y \left[E_X \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) \{X-Y\} \middle| Y \right] \right] \\
 &\geq E_Y \left[E_{\tilde{Y}} \left[u' \left(\frac{\tilde{Y}+Y}{2} \right) \{\tilde{Y}-Y\} \middle| Y \right] \right] \\
 &= E \left[u' \left(\frac{\tilde{Y}+Y}{2} \right) \{\tilde{Y}-Y\} \right] \\
 &= E \left[u' \left(\frac{\tilde{Y}+Y}{2} \right) \tilde{Y} \right] - E \left[u' \left(\frac{\tilde{Y}+Y}{2} \right) Y \right] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

ただし, 不等号は上述の u に関する仮定 (3.13) と, $X \geq_{icv} \tilde{Y}$ により成立する.
(必要性) 以下のように分布する資産 X, Y を考える:

$$X = \begin{cases} b & \text{w. p. } 1-2p \\ x_1 & \text{w. p. } p \\ x_2 & \text{w. p. } p \end{cases} \tag{3.17}$$

$$Y = \begin{cases} b & \text{w. p. } 1-2p \\ y_1 & \text{w. p. } p \\ y_2 & \text{w. p. } p \end{cases} \tag{3.18}$$

ただし, b は任意であるが, 他のパラメータは

$$0 \leq p \leq \frac{1}{2}, \tag{3.19}$$

$$y_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq y_2, \tag{3.20}$$

$$y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2 \tag{3.21}$$

を満足するものとする. このとき, 式 (3.20), (3.21) および定理 2.2 (Cut Criterion) を用いれば,

$$X \geq_{icv} Y \tag{3.22}$$

が成立することを容易に示すことができる.

いま,

$$\lambda_X^* \geq \frac{1}{2}, \tag{3.23}$$

すなわち,

$$U' \left(\frac{1}{2} \right) = E \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) \{X-Y\} \right] \geq 0 \tag{3.24}$$

を仮定する. 上式の右辺を具体的に計算した後, 両辺を $p(1-2p)$ で割り, $p \downarrow 0+$ と極限をとると,

$$\lim_{p \downarrow 0+} \frac{1}{p(1-2p)} U' \left(\frac{1}{2} \right) = \lim_{p \downarrow 0+} \frac{1}{p(1-2p)} E \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) \{X-Y\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= u' \left(\frac{x_1 + b}{2} \right) \{x_1 - b\} + u' \left(\frac{x_2 + b}{2} \right) \{x_2 - b\} \\
&\quad + u' \left(\frac{b + y_1}{2} \right) \{b - y_1\} + u' \left(\frac{b + y_2}{2} \right) \{b - y_2\} \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

が成立しなければならない (上式において, $U' \left(\frac{1}{2} \right)$ および期待値 $E[\cdot]$ は p に依存することには注意を要する). ここで

$$z_1 := \frac{y_1 - b}{2}, \tag{3.26}$$

$$z_2 := \frac{x_1 - b}{2}, \tag{3.27}$$

$$z_3 := \frac{x_2 - b}{2}, \tag{3.28}$$

$$z_4 := \frac{y_2 - b}{2} \tag{3.29}$$

と定義すれば, 式 (3.20), (3.21) から

$$z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4, \tag{3.30}$$

$$z_1 + z_4 \leq z_2 + z_3 \tag{3.31}$$

が成立する. いま関数 $h(\cdot: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R})$ を

$$h(z) := u'(z + b)z \tag{3.32}$$

で定義すると, 式 (3.25) は

$$h(z_2) + h(z_3) - h(z_1) - h(z_4) \geq 0, \tag{3.33}$$

あるいは,

$$h(z_2) - h(z_1) \geq h(z_4) - h(z_3) \tag{3.34}$$

と書き直すことができる.

まず,

$$(\Delta z :=) z_2 - z_1 = z_4 - z_3 (\geq 0) \quad (\Leftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 (\geq 0)) \tag{3.35}$$

と選べば, 式 (3.34) より,

$$\frac{h(z_2) - h(z_1)}{\Delta z} \geq \frac{h(z_4) - h(z_3)}{\Delta z} \tag{3.36}$$

となり, $\Delta z \downarrow 0+$ と極限をとると,

$$h'(z_1) \geq h'(z_3) \tag{3.37}$$

を得る. z_1, z_3 は, $z_1 \leq z_3$ を満たすように, 任意に選べるできるので, 式 (3.37) より, $h(z)$ は z に関して凹でなければならない.

次に

$$z_3 = z_4 \quad (\Leftrightarrow x_2 = y_2) \tag{3.38}$$

とおくと, 式 (3.34) は

$$h(z_1) \leq h(z_2) \tag{3.39}$$

となる. z_1, z_2 は, $z_1 \leq z_2$ を満たすように, 任意に選べるできるので, 式 (3.34) より, $h(z)$ は z に関して増加でなければならない.

以上より,

$$\text{任意の } b \text{ に対して, } h(z) \text{ は } z \text{ に関して増加かつ凹} \quad (3.40)$$

でなければならない.

いま

$$z := \frac{x-y}{2}, \quad (3.41)$$

$$b := y \quad (3.42)$$

なる変数変換を行うと,

$$h(z) = u'(z+b)z = \frac{1}{2} \left[u' \left(\frac{x+y}{2} \right) \{x-y\} \right] \quad (3.43)$$

となるから,

$$\text{任意の } y \text{ に対して, } u' \left(\frac{x+y}{2} \right) \{x-y\} \text{ は } x \text{ について増加かつ凹} \quad (3.44)$$

でなければならない. \square

定理 3.2 投資家の効用関数が

$$u' \geq 0, \quad u'' \leq 0 \quad (3.45)$$

を満たすものとする. この投資家が互いに独立で, ハザード率順序により,

$$X \geq_{hr} Y \quad (3.46)$$

と順序づけられた 2 つの資産 X, Y でポートフォリオを構成するものとする. このようないかなる X, Y に対しても, 最適ポートフォリオにおいて, Y よりも X に, より多くを投資する, すなわち

$$\lambda_X^* \geq \frac{1}{2}$$

を満たすための, 効用関数 u に関する必要十分条件は,

$$x \geq y \text{ のとき } u' \left(\frac{x+y}{2} \right) \{x-y\} \text{ が } x \text{ について増加} \quad (3.47)$$

$$(\iff \text{任意の } b \text{ に対して, } z \geq 0 \text{ のとき, } u'(z+b)z \text{ が } z \text{ について増加}) \quad (3.48)$$

となることである.

証明:

(十分性)

$$x \geq y \text{ のとき, } u' \left(\frac{x+y}{2} \right) \{x-y\} \text{ が } x \text{ について増加} \quad (3.49)$$

であると仮定する. いま関数 $g : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ を

$$g(x, y) := u' \left(\frac{x+y}{2} \right) x \quad (3.50)$$

とおくと,

$$g \in \mathcal{G}_{hr}^0 \quad (3.51)$$

であることを容易に示すことができる (式 (2.13) 参照).

いま X, Y を互いに独立で、ハザード率順序により、

$$X \geq_{hr} Y \quad (3.52)$$

と順序づけられた任意の 2 つの資産とすると定理 2.3 の (2) より、

$$E \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) X \right] \geq E \left[u' \left(\frac{Y+X}{2} \right) Y \right], \quad (3.53)$$

すなわち、

$$U' \left(\frac{1}{2} \right) = E \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) \{X - Y\} \right] \geq 0 \quad (3.54)$$

が成り立つ。

(必要性) 以下のように分布する資産 X, Y を考える:

$$X = \begin{cases} b & \text{w. p. } 1-p \\ x & \text{w. p. } p \end{cases} \quad (3.55)$$

$$Y = \begin{cases} b & \text{w. p. } 1-p \\ y & \text{w. p. } p \end{cases} \quad (3.56)$$

ただし、

$$b \leq y \leq x \quad (3.57)$$

を満足するものとする。このとき、

$$X \geq_{hr} Y \quad (3.58)$$

が成立することは、すべての s, u ($-\infty < s \leq u < +\infty$) に対して、

$$\left| \frac{\bar{F}_Y(s) - \bar{F}_Y(u)}{\bar{F}_X(s) - \bar{F}_X(u)} \right| = \left| \frac{P(Y > s) - P(Y > u)}{P(X > s) - P(X > u)} \right| \geq 0 \quad (3.59)$$

が成り立つことから解る。

いま、

$$\lambda_X^* \geq \frac{1}{2}, \quad (3.60)$$

すなわち、

$$U' \left(\frac{1}{2} \right) = E \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) \{X - Y\} \right] \geq 0 \quad (3.61)$$

を仮定する。上式の右辺を具体的に計算した後、両辺を $p(1-p)$ で割り、 $p \downarrow 0+$ と極限をとると、

$$\begin{aligned} \lim_{p \downarrow 0+} \frac{1}{p(1-p)} U' \left(\frac{1}{2} \right) &= \lim_{p \downarrow 0+} \frac{1}{p(1-p)} E \left[u' \left(\frac{X+Y}{2} \right) \{X - Y\} \right] \\ &= u' \left(\frac{x+b}{2} \right) \{x-b\} + u' \left(\frac{b+y}{2} \right) \{b-y\} \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

すなわち、

$$u' \left(\frac{x+b}{2} \right) \{x-b\} \geq u' \left(\frac{y+b}{2} \right) \{y-b\} \quad (3.63)$$

が成立しなければならない(式(3.62)において, $U' \left(\frac{1}{2} \right)$ および期待値 $E[\cdot]$ は p に依存することには注意を要する). b, x, y は, $b \leq y \leq x$ を満たす限り, 任意に選べるから,

$$x \geq b \text{ のとき, } u' \left(\frac{x+b}{2} \right) \{x-b\} \text{ は } x \text{ について増加,} \quad (3.64)$$

すなわち, (3.47) でなければならない. \square

3.2 多資産ポートフォリオ選択問題

この節では n 個の資産からなるポートフォリオ選択問題を考える. それら資産の収益率を確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n で表し, 以下では混乱することなく, これらの資産自身も, それぞれ X_1, X_2, \dots, X_n と呼ぶことにする. いま投資家が初期の富 $w (\geq 0)$ の内の比率 $\lambda_i (\geq 0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ を資産 X_i に投資したとすると, 彼(彼女)の最終の富の期待効用は

$$U(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := E \left[u \left(w \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \right\} \right) \right] \quad (3.65)$$

となり, 多資産ポートフォリオ選択問題とは次の数理計画問題の最適解

$$\lambda^* := (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$$

を求める, あるいは特徴づけることである:

$$\text{maximize} \quad U(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (3.66)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (3.67)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.68)$$

2 資産ポートフォリオ選択問題に対して得た結果を用いれば, 以下の定理を得る.

定理 3.3 投資家の効用関数が

$$u' \geq 0, \quad u'' \leq 0 \quad (3.69)$$

を満たすものとする. この投資家が n 個の資産 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ でポートフォリオを構成するものとする. ただし X_1, X_2 は互いに独立で, 増加凹順序により,

$$X_1 \geq_{icv} X_2 \quad (3.70)$$

と順序づけられ, さらにそれらは X_3, \dots, X_n とともに独立であると仮定する. このようないかなる n 個の資産 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ に対しても, 最適ポートフォリオにおいて, X_2 よりも X_1 に, より多くを投資する, すなわち

$$\lambda_1^* \geq \lambda_2^*$$

を満たすための, 効用関数 u に関する必要十分条件は,

$$\text{任意の } y \text{ に対して, } u' \left(\frac{x+y}{2} \right) \{x-y\} \text{ が } x \text{ について増加かつ凹} \quad (3.71)$$

$$(\Leftrightarrow \text{任意の } b \text{ に対して, } u'(z+b)z \text{ が } z \text{ について増加かつ凹}) \quad (3.72)$$

となることである. \square

定理 3.4 投資家の効用関数が

$$u' \geq 0, \quad u'' \leq 0 \quad (3.73)$$

を満たすものとする. この投資家が n 個の資産 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ でポートフォリオを構成するものとする. ただし X_1, X_2 は互いに独立で, ハザード率順序により,

$$X_1 \geq_{hr} X_2 \quad (3.74)$$

と順序づけられ, さらにそれらは X_3, \dots, X_n とともに独立であると仮定する. このようないかなる n 個の資産 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ に対しても, 最適ポートフォリオにおいて, X_2 よりも X_1 に, より多くを投資する, すなわち

$$\lambda_1^* \geq \lambda_2^*$$

を満たすための, 効用関数 u に関する必要十分条件は,

$$x \geq y \text{ のとき } u' \left(\frac{x+y}{2} \right) \{x-y\} \text{ が } x \text{ について増加} \quad (3.75)$$

$$(\iff \text{任意の } b \text{ に対して, } z \geq 0 \text{ のとき, } u'(z+b)z \text{ が } z \text{ について増加}) \quad (3.76)$$

となることである. □

参考文献

- [1] Brown, M. and Solomon, H. (1973), "Optimal Issuing Policies under Stochastic Fields Lives", *Journal of Applied Probability*, Vol. 10, pp. 761-768.
- [2] Hadar, J. and Seo, T. K. (1988), "Asset Proportions in Optimal Portfolios", *Review of Economic Studies*, Vol. 55, pp. 459-468.
- [3] Kijima, M. and Ohnishi, M. (1992), "Addendum to the Bivariate Characterization of Stochastic Orders", Technical Report No. 92-11, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo.
- [4] Kijima, M. and Ohnishi, M. (1992), "Stochastic Dominance by Functional Characterization Approach: Fundamental Results and Applications", Technical Report No. 92-12, Graduate School of Systems Management, The University of Tsukuba, Tokyo.
- [5] Levy, H. (1992), "Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis", *Management Science*, Vol. 38, pp. 555-593.
- [6] Ross, S. M. (1983), *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Shantikumar, J. G. and Yao, D. D. (1991), *Bivariate Characterization of Some Stochastic Order Relations*, *Advances in Applied Probability*, Vol. 23, pp. 642-659.
- [8] Stoyan, D. (Edited with Revision by Daley, D. J.) (1983), *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley & Sons, Chichester.